Γραμμικη Αλγεβρα II

Ασκησεισ - Φυλλαδιο 9

Διδασκοντεσ: Ν. Μαρμαρίδης - Α. Μπεληγιάννης

Βοηθοι Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελιδα Μαθηματοσ:

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII.html

13 - 6 - 2012

Άσκηση 1. *Θεωρούμε τον πίνακα πραγματικών αριθμών*

$$A = \begin{pmatrix} a & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & b \end{pmatrix}$$

(1) *Να προσδιορισθούν οι αριθμοί a, b, έτσι ώστε ο πίνακας A να έχει ως ιδιοτιμή το 0 με πολλαπλότητα 2.*

(2) *Για τις τιμές των a, b που θα βρείτε, να υπολογίσετε ορθογώνιο πίνακα P έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1} \cdot A \cdot P$ να είναι διαγώνιος.*

(3) *Να υπολογίσετε τον πίνακα A^m, $\forall m \geq 1$.*

Λύση. (1) *Ο πίνακας A είναι συμμετρικός και άρα διαγωνοποιείται.*

Προφανώς το $\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή του A αν και μόνον αν το ομογενές σύστημα

$$\begin{pmatrix} a & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\Sigma)$$

έχει μη-μηδενικές λύσεις. Επιπλέον επειδή ο ιδιοχώρος $\mathcal{V}(0)$ ο οποίος αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 0$ συμπίπτει με το σύνολο λύσεων $\Lambda(\Sigma)$ του (Σ), θα έχουμε ότι: ο πίνακας A ως ιδιοτιμή το 0 με πολλαπλότητα 2 αν και μόνον αν

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(0) = 2 \iff \dim_{\mathbb{R}} \Lambda(\Sigma) = 2 \iff 3 - \mathsf{r}(A) = 2 \iff \mathsf{r}(A) = 1$$

Άρα θέλουμε όλες οι ελάσσονες ορίζουσες δεύτερης τάξης του πίνακα A να είναι μηδέν, δηλαδή:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} a & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 8a - 16 = 0 \implies a = 2 \\ \\ \begin{vmatrix} 8 & 8 \\ 8 & b \end{vmatrix} = 8b - 64 = 0 \implies b = 8 \end{cases}$$

Συνεπώς για $a = 2$ και $b = 8$ έχουμε $\dim \mathcal{V}(0) = 2$.

(2) *Θεωρούμε τον πίνακα πραγματικών αριθμών*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A. Έχουμε:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & 4 \\ 4 & 8-\lambda & 8 \\ 4 & 8 & 8-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{\Sigma_2 \to \Sigma_2 - \Sigma_3} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 4 & -\lambda & 8 \\ 4 & \lambda & 8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 4 & -1 & 8 \\ 4 & 1 & 8-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_3} \lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 8 & 0 & 16-\lambda \\ 4 & 1 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 8 & 16-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)\big((2-\lambda)(16-\lambda) - 32\big)$$

$$= (-\lambda)(\lambda^2 - 18\lambda) = -\lambda^2(\lambda - 18)$$

Συνεπώς οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 0$ *πολλαπλότητας δύο (όπως ακριβώς περιμέναμε) και* $\lambda_2 = 18$ *πολλαπλότητας ένα. Για τον ιδιόχωρο* $\mathcal{V}(0)$ *λύνουμε το παρακάτω ομογενές σύστημα:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies x = -2y - 2z$$

και άρα

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(0) &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -2y - 2z\big\} \\ &= \big\{(-2y-2z, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y, z \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \big\{y(-2,1,0) + z(-2,0,1) \in \mathbb{R}^3 \mid y, z \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \langle(-2,1,0), (-2,0,1)\rangle \end{aligned}$$

Το σύνολο $\{(-2,1,0), (-2,0,1)\}$ *αποτελεί μια βάση του ιδιόχωρου* $\mathcal{V}(0)$ *που δεν είναι ορθογώνια όμως διότι* $\langle(-2,1,0), (-2,0,1)\rangle = 4 \neq 0$. *Για να βρούμε μια ορθοκανονική βάση του* $\mathcal{V}(0)$ *εφαρμόζουμε τη διαδικασία Gram-Schmidt.*

Διαδικασία Gram-Schmidt:
Θέτουμε $\vec{x}_1 = (-2,1,0)$ *και* $\vec{x}_2 = (-2,0,1)$. *Τότε* $\vec{y}_1 = \vec{x}_1 = (-2,1,0)$ *και*

$$\begin{aligned} \vec{y}_2 = \vec{x}_2 - \frac{\langle\vec{x}_2, \vec{y}_1\rangle}{\langle\vec{y}_1, \vec{y}_1\rangle} \cdot \vec{y}_1 &= (-2,0,1) - \frac{\langle(-2,0,1), (-2,1,0)\rangle}{\langle(-2,1,0), (-2,1,0)\rangle} \cdot (-2,1,0) \\ &= (-2,0,1) - \frac{4}{5} \cdot (-2,1,0) \\ &= (-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, 1) \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{y}_1$ *και* $\vec{y}_2$*:*

$$\|\vec{y}_1\| = \|(-2,1,0)\| = \sqrt{\langle(-2,1,0), (-2,1,0)\rangle} = \sqrt{5}$$

$$\|\vec{y}_2\| = \|(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, 1)\| = \sqrt{\langle(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, 1), (-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, 1)\rangle} = \sqrt{\frac{45}{25}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

Τότε η ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}(0)$ *είναι*

ΟΚΒ : $\big\{\vec{z}_1, \vec{z}_2\big\} = \big\{\vec{z}_1 = \frac{\vec{y}_1}{\|\vec{y}_1\|}, \vec{z}_2 = \frac{\vec{y}_2}{\|\vec{y}_2\|}\big\} = \big\{(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0), (-\frac{2}{3\sqrt{5}}, -\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{3})\big\}$

Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}(18)$ έχουμε το σύστημα:

$$\begin{pmatrix} -16 & 4 & 4 \\ 4 & -10 & 8 \\ 4 & 8 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -4x + y + z = 0 \\ 2x - 5y + 4z = 0 \\ 2x + 4y - 5z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -4x + y + z = 0 \\ 2x - 5y + 4z = 0 \end{cases}$$

Αν λύσουμε τη πρώτη εξίσωση ως προς y και αντικαταστήσουμε στη δεύτερη βρίσκουμε $x = \frac{z}{2}$ και τότε έπεται ότι $y = z$. Άρα

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(18) &= \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \frac{z}{2} \ \text{ και } \ y = z\big\} \\ &= \big\{(\frac{z}{2}, z, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \big\{z(\frac{1}{2}, 1, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \langle (1, 2, 2) \rangle \end{aligned}$$

Επομένως μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}(18)$ είναι το σύνολο

$$\{\vec{z}_3\} = \{\frac{(1,2,2)}{\|(1,2,2)\|}\} = \{(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})\}$$

Τότε έχουμε τον ορθογώνιο πίνακα

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

έτσι ώστε

$${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \Longrightarrow A = P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \cdot {}^tP$$

και άρα ο πίνακας $P^{-1} \cdot A \cdot P$ είναι διαγώνιος.

(3) *Για κάθε $m \geq 1$ έχουμε:*

$$A = P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \cdot {}^tP \Longrightarrow A^m = P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}^m \cdot {}^tP = \cdots = 18^{m-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{pmatrix} \qquad \square$$

Άσκηση 2. *Να προσδιορισθεί ο αριθμός a έτσι ώστε ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -a \\ a & 4 & -4 \\ -a & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

να είναι μη-αρνητικός.

Λύση. *Ο πίνακας A είναι μη-αρνητικός αν και μόνο αν οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι ≥ 0.*

Έχουμε:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & a \\ a & 4-\lambda & -4 \\ -a & -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_2} \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & -a \\ a & 4-\lambda & -4 \\ 0 & -\lambda & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & -a \\ a & 4-\lambda & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\Sigma_2 \to \Sigma_2 - \Sigma_3} (-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2a & -a \\ a & 8-\lambda & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2a \\ a & 8-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 8 - 2a^2)$$

$$= (-\lambda)\Big(\lambda - (\frac{9}{2} + \frac{\sqrt{49+8a^2}}{2})\Big)\Big(\lambda - (\frac{9}{2} - \frac{\sqrt{49+8a^2}}{2})\Big)$$

Επομένως έχουμε τις ιδιοτιμές:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{9}{2} + \frac{\sqrt{49+8a^2}}{2} \;>\; 0, \quad \lambda_3 = \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{49+8a^2}}{2}$$

και πρέπει $\lambda_3 \geq 0$, *δηλαδή*

$$9 \geq \sqrt{49+8a^2} \implies 81 \geq 49 + 8a^2 \implies 8a^2 \leq 32 \implies a^2 \leq 4 \implies (a+2)(a-2) \leq 0$$

$$\implies -2 \leq a \leq 2$$

Άρα ο πίνακας A *είναι μη-αρνητικός αν και μόνο αν* $-2 \leq a \leq 2$.

Δεύτερος Τρόπος: Έχουμε:

$$A \geq 0 \iff \begin{cases} |A_1| \geq 0 \\ \\ |A_2| \geq 0 \\ \\ |A_3| = |A| \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} |A_1| = 1 > 0 \\ \\ |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 4 \end{vmatrix} = 4 - a^2 \geq 0 \iff -2 \leq a \leq 2 \\ \\ |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & a & -a \\ a & 4 & -4 \\ -a & -4 & 4 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

και άρα $A \geq 0$ *αν και μόνο αν* $-2 \leq a \leq 2$. □

Άσκηση 3. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & 0 & -\frac{7}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{7}{2} & 0 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί πίνακας $B \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, *έτσι ώστε:* $B^3 = A$.

Λύση. *Έχουμε:*

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{9}{2}-\lambda & 0 & -\frac{7}{2} \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -\frac{7}{2} & 0 & \frac{9}{2}-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda) \begin{vmatrix} \frac{9}{2}-\lambda & -\frac{7}{2} \\ -\frac{7}{2} & \frac{9}{2}-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\big((\frac{9}{2}-\lambda)^2 - \frac{49}{4}\big)$$

$$= (-1-\lambda)(\frac{9}{2} - \lambda + \frac{7}{2})(\frac{9}{2} - \lambda - \frac{7}{2}) = (-1-\lambda)(8-\lambda)(1-\lambda)$$

Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 8,\ \lambda_3 = -1$ *πολλαπλότητας ένα. Στη συνέχεια υπολογίζουμε εύκολα ορθοκανονικές βάσεις για τους αντίστοιχους ιδιοχώρους. Βρίσκουμε:*

$$\mathcal{V}(1) = \left\{x\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathcal{V}(-1) = \left\{x\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathcal{V}(8) = \left\{x\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle \begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} \right\rangle$$

Τότε υπάρχει ο ορθογώνιος πίνακας

$$P = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

έτσι ώστε

$${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix} \implies A = P \cdot \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix} \cdot {}^tP$$

Θέτουμε

$$B = P \cdot \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \cdot {}^tP = \cdots = \begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & -1 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

Τότε

$$B^3 = P \cdot \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}^3 \cdot {}^tP = P \cdot \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix} \cdot {}^tP = A$$

και άρα πράγματι βρήκαμε πίνακα $B \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, έτσι ώστε: $B^3 = A$. □

Άσκηση 4. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

(1) *Να δείξετε ότι ο πίνακας A είναι θετικός.*
(2) *Να βρείτε συμμετρικό και αντιστρέψιμο πίνακα B έτσι ώστε:* $A = B^2$.

Λύση. *Έχουμε:*

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix}3-\lambda & 0 & -1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ -1 & 0 & 3-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda & -1\\ -1 & 3-\lambda\end{vmatrix} = \cdots = -(\lambda-2)^2(\lambda-4)$$

Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι: $\lambda_1 = 2 > 0$ πολλαπλότητας δυο και $\lambda_2 = 4 > 0$ πολλαπλότητας ένα. Επομένως ο πίνακας A είναι θετικός. Στη συνέχεια υπολογίζουμε εύκολα ορθοκανονικές βάσεις για τους αντίστοιχους ιδιοχώρους. Βρίσκουμε:

$$\mathcal{V}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Το παραπάνω σύνολο διανυσμάτων αποτελεί μια βάση του ιδιόχωρου $\mathcal{V}(2)$ που είναι ορθογώνια. Άρα μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}(2)$ αποτελεί το σύνολο

$$\left\{ \vec{\epsilon}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \vec{\epsilon}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Ακόμα υπολογίζουμε:

$$\mathcal{V}(4) = \left\{ \begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

και άρα μια ορθοκανονική βάση του ιδιοχώρου $\mathcal{V}(4)$ είναι

$$\left\{ \vec{\epsilon}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$$

Τότε υπάρχει ο ορθογώνιος πίνακας

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

έτσι ώστε

$$^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \implies A = P \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot {}^tP$$

Θεωρούμε το πίνακα

$$B = P \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot {}^tP = \cdots = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \end{pmatrix}$$

που είναι συμμετρικός και αντιστρέψιμος διότι

$$|B| = |P| \cdot \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot |{}^tP| = 4 \neq 0$$

Τότε

$$B^2 = P \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 \cdot {}^tP = P \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot {}^tP = A$$

και άρα βρήκαμε ένα συμμετρικό και αντιστρέψιμο πίνακα $B \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, έτσι ώστε: $B^2 = A$. $\square$

Άσκηση 5. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μια αυτοπροσαρτημένη γραμμική απεικόνιση. Να δείξετε ότι αν $f^n = 0$, τότε $f = 0$.*
$\big(f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ *είναι η σύνθεση της f με τον εαυτό της n-φορές*$\big)$.

Λύση. Έστω A ο πίνακας της f σε μια ορθοκανονική βάση $\mathcal{B}$ του $\mathcal{E}$. Τότε ο πίνακας A είναι συμμετρικός και από το Φασματικό Θεώρημα γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένας ορθογώνιος πίνακας P έτσι ώστε

$$ {}^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix} $$

όπου λ_i οι ιδιοτιμές του πίνακα A, άρα και της f, και $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Τότε

$$ ({}^tP \cdot A \cdot P)^n = {}^tP \cdot A^n \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_m^n \end{pmatrix} $$

όπου λ_i^n είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A^n. Αφού $f^n = 0$ έπεται ότι $A^n = 0$ και άρα $\lambda_i^n = 0$ για κάθε $1 \leq i \leq m$. Τότε οι ιδιοτιμές $\lambda_i = 0$ και άρα $A = 0$. Επομένως έχουμε: $\quad f = 0$.

Δεύτερος Τρόπος: Από το Φασματικό Θεώρημα υπάρχει ορθοκανονική βάση $\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots \vec{e}_n\big\}$ του $\mathcal{E}$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα της f:

$$ f(\vec{e}_i) = \lambda_i \cdot \vec{e}_i, \quad 1 \leq i \leq n $$

Τότε προφανώς: $\;f^k(\vec{e}_i) = \lambda_i^k \cdot \vec{e}_i$, $\forall k \geq 1$. Επομένως $\vec{0} = f^m(\vec{e}_i) = \lambda_i^m \cdot \vec{e}_i$, $1 \leq i \leq n$, και άρα $\lambda_i^m = 0$ ή ισοδύναμα $\lambda_i = 0$, $1 \leq i \leq n$, διότι $\vec{e}_i \neq \vec{0}$. Επομένως $f(\vec{e}_i) = \vec{0}$, $\quad 1 \leq i \leq n$. Τότε $f = 0$ διότι η f μηδενίζει κάθε διάνυσμα της βάσης $\mathcal{B}$. $\quad\square$

Άσκηση 6. *Έστω $(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση.*

(1) *Να δείξετε ότι η γραμμική απεικόνιση $f \circ f^* : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι αυτοπροσαρτημένη και μη-αρνητική.*
(2) *Να δείξετε ότι η γραμμική απεικόνιση $f \circ f^*$ είναι θετική αν και μόνον αν η f είναι ισομορφισμός.*

Λύση. (1) Γνωρίζουμε ότι αν $f, g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι δυο γραμμικές απεικονίσεις, όπου $(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, τότε

$$ (f \circ g)^* = g^* \circ f^* $$

και $(f^*)^* = f$ (δείτε τις Ασκήσεις 5 και 6 του Φυλλαδίου 8 στην Επίλυση Επιλεγμένων Ασκήσεων). Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω έχουμε:

$$ (f \circ f^*)^* = (f^*)^* \circ f^* = f \circ f^* $$

και άρα η $f \circ f^*$ είναι αυτοπροσαρτημένη. Επίσης για κάθε $\vec{x} \in \mathcal{E}$ έχουμε:

$$ \big\langle (f \circ f^*)(\vec{x}), \vec{x} \big\rangle = \big\langle f(f^*(\vec{x})), \vec{x} \big\rangle = \big\langle f^*(\vec{x}), f^*(\vec{x}) \big\rangle = \|f^*(\vec{x})\|^2 \geq 0 $$

Επομένως η γραμμική απεικόνιση $f \circ f^*$ είναι μη-αρνητική.

(2) *Έστω ότι η $f \circ f^*$ είναι θετική. Τότε για κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$ έχουμε:*

$$\big\langle (f \circ f^*(\vec{x}), \vec{x} \big\rangle > 0 \implies \|f^*(\vec{x})\|^2 > 0 \implies f^*(\vec{x}) \neq \vec{0}, \quad \forall \vec{x} \neq \vec{0} \implies \operatorname{Ker} f^* = \{\vec{0}\}$$

Συνεπώς η f^* είναι ισομορφισμός. Τότε υπάρχει γραμμική απεικόνιση $g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε

$$g \circ f^* = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}} = f^* \circ g \implies (g \circ f^*)^* = (\mathrm{Id}_{\mathcal{E}})^* = (f^* \circ g)^* \implies$$

$$f \circ g^* = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}} = g^* \circ f$$

Επομένως η f είναι ισομορφισμός.

Αντίστροφα υποθέτουμε ότι η f είναι ισομορφισμός. Τότε όπως παραπάνω έχουμε ότι και η f^* είναι ισομορφισμός. Τότε για κάθε $\vec{x} \in \mathcal{E}$ με $\vec{x} \neq \vec{0}$ θα έχουμε $\|f^*(\vec{x})\| \neq 0$, και άρα:

$$\|f^*(\vec{x})\|^2 > 0 \implies \big\langle (f \circ f^*)(\vec{x}), \vec{x} \big\rangle > 0$$

Άρα η $f \circ f^*$ είναι θετική. $\square$

Άσκηση 7. *Έστω $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ ένας αντισυμμετρικός πίνακας. Να δείξετε ότι υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P και πίνακας B με την ιδιότητα ο πίνακας B^2 να είναι διαγώνιος, έτσι ώστε:*

$$P^{-1} \cdot B \cdot P = A$$

Λύση. *Έστω $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ ένας αντισυμμετρικός πίνακας, δηλαδή ${}^tA = -A$. Τότε ο πίνακας A^2 είναι συμμετρικός αφού*

$${}^t(A^2) = {}^t(A \cdot A) = {}^tA \cdot {}^tA = (-A) \cdot (-A) = A^2$$

Συνεπώς από το Φασματικό Θεώρημα υπάρχει ορθογώνιος πίνακας Q έτσι ώστε

$${}^tQ \cdot A^2 \cdot Q = \Delta \implies A^2 = Q \cdot \Delta \cdot {}^tQ$$

όπου Δ είναι ένας διαγώνιος πίνακας και θέτουμε $P = Q^{-1} = {}^tQ$. Άρα

$$P \cdot A^2 \cdot P^{-1} = \Delta \tag{$*$}$$

και θεωρούμε το πίνακα

$$B = P \cdot A \cdot P^{-1}$$

Τότε έχουμε:

$$P^{-1} \cdot B \cdot P = P^{-1} \cdot (P \cdot A \cdot P^{-1}) \cdot P = (P^{-1} \cdot P) \cdot A \cdot (P^{-1} \cdot P) = A$$

και

$$B^2 = (P \cdot A \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot A \cdot P^{-1}) = P \cdot A^2 \cdot P^{-1} \overset{(*)}{=} \Delta \qquad \square$$

Άσκηση 8. *Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή*

$$\mathsf{q} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathsf{q}(x, y, z) = \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{2}y^2 + 5z^2 - xy - 2xz + 2yz$$

στους κύριους άξονές της, οι οποίοι και να βρεθούν.

Λύση. *Ο πίνακας της τετραγωνικής μορφής* q *είναι*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A. Έχουμε:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{7}{2}-\lambda & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{2}-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + \Gamma_2} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3-\lambda & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{2}-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{2}-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\Sigma_2 \to \Sigma_2 - \Sigma_1} (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 4-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\big((4-\lambda)(5-\lambda)-2\big)$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = -(\lambda-3)^2(\lambda-6)$$

Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1 = 3$ πολλαπλότητας δυο και $\lambda_2 = 6$ πολλαπλότητας ένα. Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}(3)$ λύνουμε το παρακάτω ομογενές σύστημα:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases} \implies x = y + 2z$$

και άρα

$$\mathcal{V}(3) = \Big\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x = y + 2z \Big\} = \Big\{ \begin{pmatrix} y+2z \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid y, z \in \mathbb{R} \Big\}$$

$$= \Big\{ y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid y, z \in \mathbb{R} \Big\} \implies \mathcal{V}(3) = \Big\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\rangle$$

Το παραπάνω σύνολο διανυσμάτων αποτελεί μια βάση του ιδιόχωρου $\mathcal{V}(3)$ που όμως δεν είναι ορθογώνια. Για να βρούμε μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}(3)$ εφαρμόζουμε τη διαδικασία Gram-Schmidt.

<u>*Διαδικασία Gram-Schmidt*</u>*:*

Θέτουμε $\vec{x}_1 = (1,1,0)$ και $\vec{x}_2 = (2,0,1)$. Τότε $\vec{y}_1 = \vec{x}_1 = (1,1,0)$ και

$$\begin{aligned} \vec{y}_2 = \vec{x}_2 - \frac{\langle \vec{x}_2, \vec{y}_1 \rangle}{\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle} \cdot \vec{y}_1 &= (2,0,1) - \frac{\langle (2,0,1), (1,1,0) \rangle}{\langle (1,1,0), (1,1,0) \rangle} \cdot (1,1,0) \\ &= (2,0,1) - (1,1,0) \\ &= (1,-1,1) \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{y}_1$ και $\vec{y}_2$:

$$\|\vec{y}_1\| = \|(1,1,0)\| = \sqrt{\langle (1,1,0), (1,1,0) \rangle} = \sqrt{2}$$

$$\|\vec{y}_2\| = \|(1,-1,1)\| = \sqrt{\big\langle (1,-1,1), (1,-1,1) \big\rangle} = \sqrt{3}$$

Τότε η ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}(3)$ είναι

$$\textit{OKB}: \quad \Big\{ \vec{\epsilon}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\epsilon}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \Big\}$$

Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}(6)$ *έχουμε το ομεγενές σύστημα:*

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -5x - y - 2z = 0 \\ -x - 5y + 2z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}$$

Προσθέτοντας τις δύο πρώτες εξισώσεις βρίσκουμε $x = -y$ *και αντικαθιστώντας στη τρίτη έχουμε ότι* $z = 2y$. *Επομένως έχουμε:*

$$\mathcal{V}(6) = \Big\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x = -y \ \ \text{και} \ \ z = 2y \Big\} = \Big\{ y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid y \in \mathbb{R} \Big\} = \Big\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Big\rangle$$

και άρα μια ορθοκανονική βάση του ιδιόχωρου $\mathcal{V}(6)$ *είναι*

$$\textsf{OKB}: \ \ \Big\{ \vec{\epsilon}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \Big\}$$

Συνεπώς οι κύριοι άξονες της τετραγωνικής μορφής q *είναι*

$$\Big\{ \vec{\epsilon}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\epsilon}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \vec{\epsilon}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \Big\}$$

ή δουλεύοντας στον $\mathbb{R}^3$, *οι κύριοι άξονες είναι τα διανύσματα του* $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{\varepsilon}_1 = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\Big), \qquad \vec{\varepsilon}_2 = \Big(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big), \qquad \vec{\varepsilon}_3 = \Big(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\Big)$$

και η τετραγωνική μορφή q *στους κύριους άξονες γράφεται ως εξής:*

$$\mathsf{q}(x', y', z') = 3(x')^2 + 3(y')^2 + 6(z')^2 \qquad \square$$

Άσκηση 9. *Να προσδιορισθεί το είδος των καμπύλων οι οποίες ορίζονται από τις εξισώσεις:*

$$(C_1): \quad xy = 1$$
$$(C_2): \quad 5x^2 - 4xy + 8y^2 = 1$$

Λύση. *Ο πίνακας της τετραγωνικής μορφής* $\mathsf{q}(x, y) = xy$ *είναι*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A *είναι*

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{4}$$

Συνεπώς έχουμε τις απλές ιδιοτιμές $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ *και* $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$. *Τότε στους κύριους άξονες* $\{\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2\}$ *η τετραγωνική μορφή* q *γράφεται ως εξής:*

$$\mathsf{q}(x', y') = \frac{1}{2}(x')^2 - \frac{1}{2}(y')^2$$

και άρα η καμπύλη $(C_1): \ xy = 1$ *παριστάνει υπερβολή αφού*

$$(C_1): \quad \frac{1}{2}(x')^2 - \frac{1}{2}(y')^2 = 1 \implies (x')^2 - (y')^2 = 2: \ \textit{υπερβολή}$$

Για τη καμπύλη (C_2) έχουμε ότι πίνακας της τετραγωνικής μορφής $\mathsf{q}(x,y) = 5x^2 - 4xy + 8y^2$ *είναι*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

και υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(8-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 13\lambda + 36 = (\lambda - 9)(\lambda - 4)$$

Επομένως έχουμε τις απλές ιδιοτιμές $\lambda_1 = 9$ και $\lambda_2 = 4$. Τότε στους κύριους άξονες $\{\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2\}$ η τετραγωνική μορφή q *γράφεται ως εξής:*

$$\mathsf{q}(x', y') = 9(x')^2 + 4(y')^2$$

και άρα η καμπύλη (C_2) : $5x^2 - 4xy + 8y^2 = 1$ παριστάνει έλλειψη αφού

$$(C_2): \quad 9(x')^2 + 4(y')^2 = 1 \implies \frac{(x')^2}{\frac{1}{9}} + \frac{(y')^2}{\frac{1}{4}} = 1 : \text{ έλλειψη} \qquad \square$$

Άσκηση 10. *Να προσδιορισθεί το είδος της τετραγωνικής επιφάνειας η οποία ορίζεται από την εξίσωση:*

$$(S): \quad 9x^2 - 4xy + 6y^2 + 3z^2 + 2\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y + 12z + 16 = 0$$

Λύση. *Θεωρούμε την απεικόνιση*

$$\mathsf{q} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathsf{q}(x,y,z) = 9x^2 - 4xy + 6y^2 + 3z^2$$

Τότε η απεικόνιση q *είναι μια τετραγωνική μορφή της οποίας ο πίνακας είναι*

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A. Έχουμε:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = -(\lambda - 10) \cdot (\lambda - 5) \cdot (\lambda - 3)$$

και άρα έχουμε τις ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 3$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε ορθοκανονικές βάσεις των αντίστοιχων ιδιοχώρων. Εύκολα βρίσκουμε τα εξής:

$$\mathcal{V}(10) = \Big\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\rangle \implies \text{ΟΚΒ του } \mathcal{V}(10): \ \Big\{ \vec{\epsilon}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} \Big\}$$

$$\mathcal{V}(5) = \Big\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\rangle \implies \text{ΟΚΒ του } \mathcal{V}(5): \ \Big\{ \vec{\epsilon}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} \Big\}$$

$$\mathcal{V}(3) = \Big\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\rangle \implies \text{ΟΚΒ του } \mathcal{V}(3): \ \Big\{ \vec{\epsilon}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$$

Τότε οι κύριοι άξονες της q *είναι:* $\{\vec{\epsilon}_1,\, \vec{\epsilon}_2,\, \vec{\epsilon}_3\}$ *και υπάρχει ορθογώνιος πίνακας*

$$P = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

έτσι ώστε

$$^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Έστω $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$*. Τότε το τυχαίο διάνυσμα* (x, y, z) *γράφεται ως:* $(x, y, z) = x'\vec{\epsilon}_1 + y'\vec{\epsilon}_2 + z'\vec{\epsilon}_3$ *και έχουμε:*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \implies x = \frac{-2x' + y'}{\sqrt{5}}, \quad y = \frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}}, \quad z = z'$$

Τότε η αρχική επιφάνεια γράφεται ως εξής:

$$10(x')^2 + 5(y')^2 + 3(z')^2 + 2(-2x' + y') + 4(x' + 2y') + 12z' + 16 = 0$$

$$\implies \quad 10(x')^2 + 5(y')^2 + 3(z')^2 + 10y' + 12z' + 16 = 0$$

$$\implies \quad 10(x')^2 + 5\big((y')^2 + 2y' + 1\big) + 3\big((z')^2 + 4z' + 4\big) + 16 - 17 = 0$$

$$\implies \quad 10(x')^2 + 5\big((y')^2 + 2y' + 1\big) + 3\big((z')^2 + 4z' + 4\big) = 1 \qquad (*)$$

Η επιφάνεια $(*)$ *προέκυψε από την αρχική μετά από στροφή των αξόνων η οποία προσδιορίζεται από τον ορθογώνιο πίνακα* P.

Τέλος θέτοντας

$$x'' = x', \quad y'' = y' + 1, \quad z'' = z' + 2$$

δηλαδή εφαρμόζοντας την παράλληλη μεταφορά

$$(x', y', z') \quad \longrightarrow \quad (x'', y'', z'') = (x', y', z') + (0, 1, 2)$$

η εξίσωση $(*)$ *γράφεται*

$$10(x'')^2 + 5(y'')^2 + 3(z'')^2 = 1$$

η οποία παριστάνει ελλειψοειδές στο νέο σύστημα συντεταγμένων το οποίο προέκυψε μετά από στροφή και παράλληλη μεταφορά. $\square$

Άσκηση 11. *Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή*

$$\mathsf{q} \,:\, \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \mathsf{q}(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy$$

(1) *Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή* q *στους κύριους άξονές της, οι οποίοι και να βρεθούν.*
(2) *Να προσδιορισθεί το είδος της τετραγωνικής επιφάνειας η οποία ορίζεται από την εξίσωση:*

$$(S): \quad 3x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy = 8$$

(3) *Να δείξετε ότι ο πίνακας* A *της τετραγωνικής μορφής* q *είναι θετικός και στη συνέχεια να βρεθεί συμμετρικός και αντιστρέψιμος πίνακας* B *έτσι ώστε:* $B^2 = A$.

Λύση. (1) *Ο πίνακας της τετραγωνικής μορφής* q *είναι*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A. *Έχουμε:*

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\big((3-\lambda)^2 - 1\big) = (2-\lambda)^2(4-\lambda)$$

και άρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 2$ *πολλαπλότητας δυο και* $\lambda_2 = 4$ *απλή. Για τον ιδιόχωρο* $\mathcal{V}(2)$ *λύνουμε το παρακάτω ομογενές σύστημα:*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies x = y$$

και άρα

$$\mathcal{V}(2) = \Big\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x = y \Big\} = \Big\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x, z \in \mathbb{R} \Big\}$$

$$= \Big\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x, z \in \mathbb{R} \Big\} \implies \mathcal{V}(2) = \Big\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\rangle$$

Το παραπάνω σύνολο διανυσμάτων αποτελεί μια βάση του ιδιόχωρου $\mathcal{V}(2)$ *που είναι ορθογώνια. Άρα μια ορθοκανονική βάση του* $\mathcal{V}(2)$ *αποτελεί το σύνολο*

$$\Big\{ \vec{\epsilon}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\epsilon}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$$

Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}(4)$ *έχουμε το παρακάτω ομογενές σύστημα:*

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies y = -x \ \text{ και } \ z = 0$$

και άρα

$$\mathcal{V}(4) = \Big\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid y = -x \ \text{ και } \ z = 0 \Big\} = \Big\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x \in \mathbb{R} \Big\} = \Big\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\rangle$$

Συνεπώς μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}(4)$ *αποτελεί το σύνολο*

$$\Big\{ \vec{\epsilon}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \Big\}$$

Άρα οι κύριοι άξονες της τετραγωνικής μορφής q *είναι*

$$\left\{\vec{\epsilon}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\epsilon}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{\epsilon}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

και η τετραγωνική μορφή q *στους κύριους άξονες γράφεται ως εξής:*

$$\mathsf{q}(x', y', z') = 2(x')^2 + 2(y')^2 + 4(z')^2$$

(2) *Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι*

$$(S): \quad 2(x')^2 + 2(y')^2 + 4(z')^2 = 8 \implies \frac{(x')^2}{4} + \frac{(y')^2}{4} + \frac{(z')^2}{2} = 1$$

και άρα το είδος της τετραγωνικής επιφάνειας η οποία ορίζεται από την εξίσωση:

$$(S): \quad 3x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy = 8$$

είναι ελλειψοειδές.

(3) *Από το ερώτημα* (1) *έχουμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα* A *είναι* $\lambda_1 = 2 > 0$, $\lambda_2 = 4 > 0$ *και άρα ο πίνακας* A *είναι θετικός. Πάλι από το ερώτημα* (1) *γνωρίζουμε ότι υπάρχει ορθογώνιος πίνακας*

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

έτσι ώστε

$$^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \implies A = P \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot {}^tP$$

Θεωρούμε το πίνακα

$$B = P \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot {}^tP = \cdots = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Τότε

$$B^2 = P \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 \cdot {}^tP = P \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot {}^tP = A \qquad \square$$